2023年度

入学試験問題（2期）

数　学

2023年3月3日（金）

解答を始める前に次の注意事項を充分に読みなさい。

受験上の注意事項

1. 受験票と筆記用具以外は机上に置いてはいけません。
2. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 不正行為と認められた場合には退席を命じることがあります。
4. 「開始」の合図で、問題用紙・解答用紙を点検し、解答用紙の受験番号・氏名欄に受験番号・氏名をはっきり書いてください。
5. 問題に関する質問は不明瞭な文字等の確認以外は応じません。
6. 問題冊子の余白部分や白紙のページは、自由に使用してかまいません。
7. 試験終了時まで退席することはできません。試験終了の合図と同時に、監督者の指示にしたがって解答用紙を通路側に置いてください。
8. 身体の具合が悪くなったときは、手を挙げて監督者に申し出てください。
9. 携帯電話を持っている人は電源を切ってください。これを時計として使用することはできません。
10. 問題冊子は持ち帰ってかまいません。

答えは解答用紙の解答欄に、数値または式で記入してください。数値または式を記入するときは明確に記してください。

問題 1

以下の問いに答えなさい。

(1) $x^2y + x - y + 1$ を因数分解しなさい。

(2) 実数 x についての 2 次不等式 $x^2 - 3x + 2 < 0$ を解きなさい。

(3) n を整数とする。「$n \geqq 5$ または $n < 2$」を満たさない n の値をすべて求めなさい。

(4) 次のデータの第 1 四分位数を求めなさい。

$$3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

(5) $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、$\tan\theta$ の値を求めなさい。ただし、$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(6) 赤球 4 個、青球 3 個、白球 3 個の合計 10 個の球が入っている袋から 3 個の球を同時に取り出す。この操作において、取り出した 3 個の球の色がすべて同じである確率を求めなさい。

(7) (6) の操作において、取り出した 3 個の球の色が 2 種類である確率を求めな求めなさい。

(8) 2 進法で表された数 $10101_{(2)}$ を 10 進法で表しなさい。

問題2

0、1、2、3 の 4 つの数字を使ってできる 4 桁の整数 (例えば 2401 など) を考える。

(1) どの数字も 1 回だけ使うとき、4 桁の整数は全部でいくつできるか答えなさい。

(2) どの数字も 1 回だけ使うとき、4 桁の偶数は全部でいくつできるか答えなさい。

(3) 同じ数字を何回使ってもよいとき、4 桁の整数は全部でいくつできるか答えなさい。

(4) 同じ数字を何回使ってもよいとき、0 を含む 4 桁の整数 (例えば 1401 など) は全部でいくつできるか答えなさい。

問題３

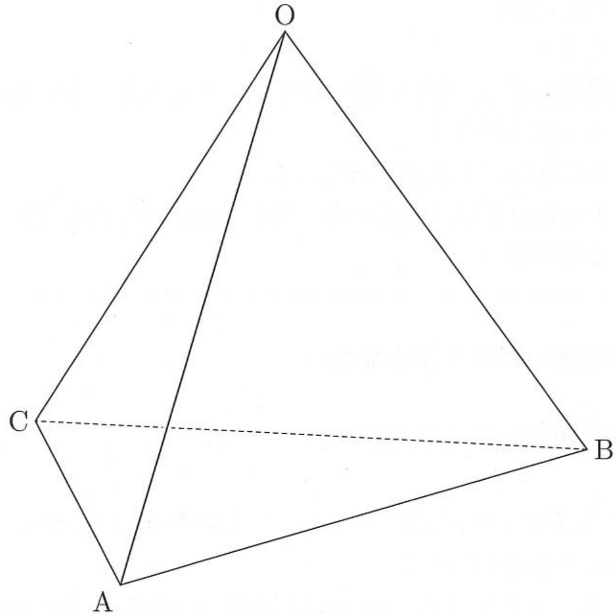
三角形 ABC があり、$AB=5$、$BC=\sqrt{21}$、$CA=4$ である。
次の問いに答えなさい。

(1) $\angle BAC$ の大きさを求めなさい。

(2) 三角形 ABC の面積を求めなさい。

(3) 三角形 ABC の外接円の半径を R とする。R を求めなさい。

(4) 三角形 ABC を底面とする四面体 OABC があり、$OA=OB=OC=\sqrt{23}$ である。四面体 OABC の体積を求めなさい。



問題４

次の太郎さんと花子さんの会話を読んで、以下の問いに答えなさい。

太郎さん：１週間は７日あって、1ヵ月は約 30 日あるよね。
花子さん：そうだね。
太郎さん：実は、7 の近くの 6、30 の近くの 28 という 2 つの整数には、共通の性質があるんだよ。
花子さん：どういう性質？
太郎さん：まず、6 の正の約数は 1、2、3、6 で、これらの総和は 12 だよね。そして、28 の・・・
花子さん：わかった！確かに 6 と 28 には共通するおもしろい性質があるね。
太郎さん：わかってもらえてよかったよ。
花子さん：他に、同じような性質をもつ数はないの？例えば、360の近くの整数とかでさ。
太郎さん：なるほど。1 年は約 360 日あるから、360 の近くの整数に目をつけたんだね。
花子さん：そうそう。
太郎さん：残念ながら、360 の近くにはないんだけど、少し離れたところにはあったと思うよ。
花子さん：その数は何？教えてほしいな。
太郎さん：すぐには思い出せないな。441、484、496 あたりだった記憶はあるんだけど・・・

(1) 28 の正の約数の個数を求めなさい。

(2) 28 の正の約数の総和を求めなさい。

(3) 6 と 28 に共通する性質として、正しいものを次の ① から ④ の中から 1 つ選び、選んだ番号を答えなさい。

① 6 を足すと、正の約数の総和と等しい値になる。
② 2 倍すると、正の約数の総和と等しい値になる。
③ 正の約数の個数を 3 倍すると、正の約数の総和と等しくなる。
④ 正の約数の個数と正の約数の総和がともに 4 の倍数である。

(4)「(3) の ① から ④ の中で、6 と 28 に共通する性質」をもつ数は完全数と呼ばれている。441、484、496 のうち、完全数を答えなさい。

2023年度
2期 入学試験

数学

解答用紙

問題1	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
	(5)	
	(6)	
	(7)	
	(8)	
問題2	(1)	
	(2)	

問題2	(3)	
	(4)	
問題3	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
問題4	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	

	志望学部・学科	受験番号	氏名
	第1		
	第2		
	第3		

※太枠内を記入

合計点

2023年度　2期　入学試験

数 学

正答

問題1	(1)	$(x+1)(xy-y+1)$
	(2)	$1<x<2$
	(3)	2，3，4
	(4)	4.5
	(5)	-2
	(6)	$\dfrac{1}{20}$
	(7)	$\dfrac{13}{20}$
	(8)	21
問題2	(1)	18個
	(2)	10個
	(3)	192個
	(4)	111個
問題3	(1)	60°
	(2)	$5\sqrt{3}$
	(3)	$\sqrt{7}$
	(4)	$\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$
問題4	(1)	6
	(2)	56
	(3)	②
	(4)	496

2023 年度　2 期　入学試験

数 学

解説

問題 1

(1)
$$\begin{aligned} & x^2y + x - y + 1 \\ &= (x^2-1)y + x + 1 \\ &= (x+1)(x-1)y + (x+1) \\ &= (x+1)\{(x-1)y+1\} \\ &= \boldsymbol{(x+1)(xy-y+1)}. \end{aligned}$$

(2) $x^2-3x+2<0$ を解くと,

$$(x-1)(x-2)<0.$$
$$\boldsymbol{1<x<2}.$$

(3) 「$n \geqq 5$　または　$n<2$」を満たさない整数 n の値は「$n<5$　かつ　$n \geqq 2$」を満たす整数 n の値であり，その値は

2，3，4.

(4) 与えられたデータ

3，4，5，7，7，7，8，9，10

の第 1 四分位数は，このデータの中央の位置より左側の

3，4，5，7

の部分の中央値であり，その値は

$$\frac{4+5}{2} = \mathbf{4.5}.$$

(5) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ より,

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}.$$
$$\tan^2\theta = 4.$$

また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ と $\cos\theta<0$ より，θ は鈍角であるから，$\tan\theta<0$ となる．

以上より,

$$\tan\theta = \mathbf{-2}.$$

(6) 球をすべて区別すると，球の取り出し方は全部で ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち，取り出した 3 個の球の色がすべて同じであるのは,「3 個とも赤球」,「3 個とも青球」,「3 個とも白球」のいずれかの場合である．

以上より，取り出した 3 個の球の色がすべて同じである確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{4+1+1}{120} = \boldsymbol{\frac{1}{20}}.$$

(7) (6) において，取り出した 3 個の球の色がすべて異なるのは，どの色の球も 1 個ずつ取り出される場合であり，その場合が起こる確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{4\cdot3\cdot3}{120} = \frac{3}{10}.$$

この場合と (6) の場合が「取り出した 3 個の球の色が 2 種類」でない場合であるから，取り出した 3 個の球の色が 2 種類である確率は

$$1-\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{20}\right) = \boldsymbol{\frac{13}{20}}.$$

(8) $2^4\cdot1 + 2^3\cdot0 + 2^2\cdot1 + 2^1\cdot0 + 1 = \mathbf{21}.$

2023年度　2期　入学試験

数 学

解説

問題２

(1)　千の位に0は入らないから，千の位に入る数字の決め方は3通りある．

この3通りのそれぞれについて，残った3つの数字を1個ずつ残りの位に並べることにより，4桁の整数が得られる．

よって，4桁の整数は全部で

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3! &= 3 \cdot 6 \\ &= \mathbf{18}\ (個) \end{aligned}$$

できる．

(2)　偶数は次の(i)，(ii)のように分類できる．

(i)　一の位が0であるもの．

残った3つの数字を1個ずつ残りの位に並べることにより，4桁の偶数が得られる．

よって，一の位が0である4桁の偶数は全部で

$$3! = 6\ (個)$$

できる．

(ii)　一の位が2であるもの．

千の位に0は入らないから，千の位に入る数字の決め方は2通りある．

この2通りのそれぞれについて，残った2つの数字を1個ずつ残りの位に並べることにより，4桁の偶数が得られる．

よって，一の位が2である4桁の偶数は全部で

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2! &= 2 \cdot 2 \\ &= 4\ (個) \end{aligned}$$

できる．

(i)，(ii)より，4桁の偶数は全部で

$$6 + 4 = \mathbf{10}\ (個)$$

できる．

(3)　千の位に0は入らないから，千の位に入る数字の決め方は3通りある．

この3通りのそれぞれについて，残りの3つの位に0，1，2，3の4つを重複を許して並べることにより，4桁の整数が得られる．

よって，4桁の整数は全部で

$$3 \cdot 4^3 = \mathbf{192}\ (個)$$

できる．

(4)　千の位から一の位までに1，2，3の3つを重複を許して並べることにより，0を含まない4桁の整数が得られる．

よって，0を含まない4桁の整数は全部で

$$3^4 = 81\ (個)$$

できる．

このことと(3)の結果より，0を含む4桁の整数は全部で

$$192 - 81 = \mathbf{111}\ (個)$$

できる．

数 学

解説

問題３

(1)　三角形 ABC に対して余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{4^2+5^2-(\sqrt{21})^2}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{2}.$$

$0^\circ < \angle\mathrm{BAC} < 180^\circ$ であるから，

$$\angle\mathrm{BAC} = \mathbf{60^\circ}.$$

(2)　三角形 ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{5\sqrt{3}}.$$

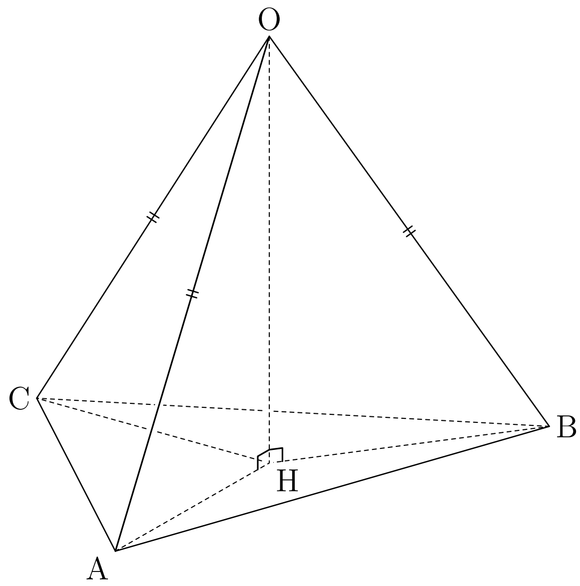
(3)　三角形 ABC に対して正弦定理を用いると，

$$\frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2R.$$

よって，

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \mathbf{\sqrt{7}}.$$

(4)　O から平面 ABC に下ろした垂線と平面 ABC との交点を H とする．



$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2},$$
$$\mathrm{BH} = \sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{OH}^2},$$
$$\mathrm{CH} = \sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2}$$

であり，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ であるから，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}.$$

よって，H は三角形 ABC の外接円の中心であるから，(3) の R を用いると，

$$\mathrm{AH} = R.$$

したがって，

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2-R^2} = \sqrt{(\sqrt{23})^2-(\sqrt{7})^2} = 4.$$

このことと (2) の結果より，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{OH} = \frac{1}{3}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 4 = \mathbf{\frac{20\sqrt{3}}{3}}.$$

数 学

解説

問題４

(1)　$28 = 2^2 \cdot 7$ より，28 の正の約数の個数は

$$(2+1)\cdot(1+1) = \mathbf{6.}$$

(2)　$28 = 2^2 \cdot 7$ より，28 の正の約数の総和は

$$(1+2+2^2)\cdot(1+7) = \mathbf{56.}$$

(3)　6 の正の約数は 1，2，3，6 の 4 個あり，これらの総和は 12 である．

このことと (1) の結果，および，(2) の結果より，① から ④ の中で，6 と 28 に共通する性質は

②.

(4)　$441 = 3^2 \cdot 7^2$ より，441 の正の約数の総和は

$$(1+3+3^2)\cdot(1+7+7^2) = 741$$

である．

$484 = 2^2 \cdot 11^2$ より，484 の正の約数の総和は

$$(1+2+2^2)\cdot(1+11+11^2) = 931$$

である．

$496 = 2^4 \cdot 31$ より，496 の正の約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)\cdot(1+31) = 992$$

である．

以上より，441，484，496 のうち，完全数は

496.